



**HAL**  
open science

## Compactification des groupes parahoriques via leurs réductifications

Arnab Kundu

► **To cite this version:**

| Arnab Kundu. Compactification des groupes parahoriques via leurs réductifications. 2026. <hal-05580922>

**HAL Id: hal-05580922**

**<https://hal.science/view/index/docid/5580922>**

Preprint submitted on 4 Apr 2026

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC BY-NC-ND 4.0 - Attribution - Non-commercial use - No Derivative Works - International License

# COMPACTIFICATION DES GROUPES PARAHORIQUES VIA LEURS REDUCTIFICATIONS

ARNAB KUNDU

## Résumé

Soit  $\mathcal{O}_K$  un anneau de valuation discrète hensélien dont le corps résiduel est parfait de caractéristique  $p$ , et soit  $K$  son corps des fractions. A tout  $K$ -schéma en groupes réductif  $G$ , Bruhat–Tits associent des modèles entiers affines lisses, dits parahoriques, en général non réductifs.

Dans cet article, pour un tel modèle  $\mathcal{P}$  associé à un groupe  $G$  comme ci-dessus, se déployant sur une extension modérée, et sous une hypothèse naturelle sur  $p$ , nous construisons une  $\mathcal{O}_K$ -compactification équivariante quasi-projective  $\mathcal{P} \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}}$  qui est génériquement projective et contient une grosse cellule. Lorsque  $G$  est adjoint, le changement de cette compactification à la clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$  récupère la compactification magnifique de  $G$  sur  $\overline{K}$  construite par De Concini–Procesi et Strickland.

Notre méthode repose sur l'utilisation de réductifications modérées, introduites et étudiées dans notre travail récent, permettant de ramener la construction au cas réductif.

## 1. Introduction et résultats

Etant donné un schéma en groupes adjoint  $G$  défini sur un corps algébriquement clos  $k$ , De Concini–Procesi [DP83] et Strickland [Str87] ont établi l'existence d'un  $k$ -schéma projectif lisse  $\overline{G}$  contenant un sous-schéma ouvert dense isomorphe à  $G$ , tel que  $G \hookrightarrow \overline{G}$  est équivariante pour les actions à gauche et à droite de  $G$ . Ce morphisme, appelé « compactification magnifique », jouit de nombreuses propriétés remarquables (voir [DP83; Str87]). En particulier, il existe seulement un nombre fini d'orbites sous l'action de  $G \times_k G$  et l'adhérence de chacune de ces orbites dans  $\overline{G}$  est lisse.

Grâce à ses propriétés, cette compactification a déjà prouvé son utilité dans divers contextes, notamment en théorie des représentations et dans l'étude des variétés de Shimura (voir He [He13], Bezrukavnikov–Kazhdan [BK15] et Abe–Mieda [AM15]). Au vu de son importance, on peut se demander si une telle compactification existe aussi sur des bases plus générales et pour des groupes non nécessairement réductifs. Une classe importante, étroitement liée à l'étude des schémas en groupes réductifs sur des corps valués  $K$ , est celle des schémas en groupes parahoriques. On rappelle qu'un schéma en groupes parahorique est un modèle intégral d'un  $K$ -schéma en groupes réductif dont la fibre spéciale contient généralement un radical unipotent non-trivial, voir la définition 2.2.

Dans cet article, nous donnons une construction d'une telle compactification pour un groupe parahorique  $\mathcal{P}$  quelconque, i.e., dont la fibre générique n'est pas nécessairement adjointe. Plus précisément, sous de bonnes hypothèses sur la caractéristique résiduelle (voir (ii)), nous construisons un  $\mathcal{O}_K$ -plongement ouvert équivariant  $\iota: \mathcal{P} \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}}$  dans un  $\mathcal{O}_K$ -schéma lisse et quasi-projectif  $\overline{\mathcal{P}}$ , tel que le changement de base de  $\iota$  à la clôture algébrique de  $K$  coïncide, dans le cas adjoint, avec la compactification magnifique de [DP83; Str87]. Par ailleurs, la  $\mathcal{O}_K$ -fibre spéciale de  $\iota$  fournit alors une compactification équivariante de celle de  $\mathcal{P}$ .

Avant d'énoncer notre résultat principal (le théorème 1.2), nous introduisons la définition suivante ainsi que les notations, auxquelles nous ferons référence par la suite.

**Définition 1.1.** Etant donné un schéma en groupes réductif  $G$  sur un schéma  $S$ , il existe une décomposition sur  $S$  du quotient adjoint  $G^{\text{ad}}$  en groupes semisimples presque-simples, voir [Con14, Proposition 6.4.4 et Remark 6.4.5] ou [Čes22<sub>Surv</sub>, (1.3.3.2)]. Les facteurs de cette décomposition sont appelés *facteurs simples* associés à  $G$ .

### Notations et Conventions

- (i) Soit  $\mathcal{O}_K$  un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel parfait de caractéristique  $p$  et de corps des fractions  $K$ .
- (ii) Soit  $G$  un  $K$ -schéma en groupes connexe réductif, muni d'un  $K$ -tore maximal  $T$  qui se déploie sur une extension modérée. On suppose que  $p \neq 2, 3, 5$  et que  $p \nmid (n+1)$  pour chaque facteur simple de type  $A_n$  associé à  $G$ .
- (iii) Soit  $F/K$  une extension non-ramifiée, d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_F$ , telle que le changement de base  $T_F \subseteq G_F$  soit quasi-déployé. On note  $U^+$  et  $U^-$  les radicaux unipotents d'une paire de  $F$ -sous-groupes de Borel opposés  $B^+$  et  $B^-$  de  $G_F$  contenant  $T_F$ .
- (iv) Soit  $\mathcal{T}$  le modèle parahorique de  $T_F$ . On fixe les morphismes de  $\mathcal{O}_F$ -schémas lisses  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{O}_F} \mathcal{T}$ -équivariants à fibres denses  $\mathcal{T} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \hookrightarrow \mathcal{T}$  construits dans la proposition 2.8. On note que l'objet central est un schéma affine alors que l'objet final est un schéma quasi-projectif dont la fibre générique est projective. Notamment, le changement de base de la composée de ces morphismes à  $F$  récupère la compactification projective dense équivariante  $T_F \hookrightarrow \overline{T}_F$  construite dans [CHS05].

**Théorème 1.2.** (a) *Sous les hypothèses (i)-(iv), étant donné un  $\mathcal{O}_K$ -modèle parahorique  $\mathcal{P}$  de  $G$  au sens de la définition 2.2, il existe un  $\mathcal{O}_K$ -schéma lisse quasi-projectif  $\overline{\mathcal{P}}$  dont la fibre générique est projective, muni d'une action de  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ , ainsi qu'une  $\mathcal{O}_K$ -immersion ouverte à fibres denses*

$$\iota_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}}$$

*équivariante sous l'action de  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ . En particulier, le changement de base de  $\iota_{\mathcal{P}}$  à  $K$  donne une  $K$ -immersion ouverte dense  $G \times_K G$ -équivariante de  $G$  dans un  $K$ -schéma lisse et projetif.*

(b) *Soit  $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_F}$  et  $(\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}$  les changements de bases à  $\mathcal{O}_F$ . Il existe des  $\mathcal{O}_F$ -schémas lisses affines à fibres connexes  $\mathcal{U}^+$  et  $\mathcal{U}^-$  dont les fibres génériques sont respectivement isomorphes à  $U^+$  et  $U^-$ , ainsi qu'une  $\mathcal{O}_F$ -immersion ouverte*

$$\overline{\Omega}_{\mathcal{P}}: \mathcal{U}^+ \times_{\mathcal{O}_F} \overline{\mathcal{P}} \times_{\mathcal{O}_F} \mathcal{U}^- \hookrightarrow (\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}.$$

*En particulier, le  $\mathcal{O}_F$ -sous-schéma ouvert quasi-projectif  $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}} \subseteq (\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}$  formé par les  $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_F} \times_{\mathcal{O}_F} \mathcal{P}_{\mathcal{O}_F}$ -translatés de l'image de  $\overline{\Omega}_{\mathcal{P}}$  contient  $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_F}$  et sa fibre générique est isomorphe à celle de  $(\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}$ .*

(c) *En outre, dans le cas où  $G$  est quasi-déployé, i.e., lorsque  $K = F$ , deux paires  $(\iota_{\mathcal{P}}, \overline{\Omega}_{\mathcal{P}})$  et  $(\iota'_{\mathcal{P}}, \overline{\Omega}'_{\mathcal{P}})$  satisfaisant (a) et (b), pour le même modèle parahorique  $\mathcal{P}$ , sont isomorphes dès que leurs fibres génériques le sont.*

Notre démonstration du théorème 1.2 repose sur les réductifications modérées (voir la définition 2.5), introduites et étudiées dans notre travail récent [Kun26]. Nous rappelons, dans la proposition 2.3, le résultat d'op. cit. utile à cet effet. À l'aide de celle-ci, nous ramenons la construction de  $(\iota_{\mathcal{P}}, \overline{\Omega}_{\mathcal{P}})$  à celle d'une compactification équivariante Galois-invariante  $(\iota_{\mathcal{G}}, \overline{\Omega}_{\mathcal{G}})$  d'un certain schéma en groupes réductif  $\mathcal{G}$ , défini sur une extension galoisienne de  $K$  judicieusement choisie. Afin de construire cette dernière, nous utilisons les résultats de [Nat26].

*Remarque 1.3 (Corps résiduel imparfait).* Puisque l'on suppose que le groupe  $T$  se déploie sur une extension modérée, il devrait être possible de supprimer l'hypothèse de perfection du corps résiduel de  $K$ , introduite dans (i). En effet, on peut alors recourir à la descente modérée de l'immeuble de Bruhat–Tits (voir [KP23, §12.9] et [Kun26, Remark 2.13]).

Dans le cas où la fibre générique  $G$  du groupe parahorique  $\mathcal{P}$  est adjointe, l'énoncé du théorème 1.2 se raffine, ce qui permet notamment d'en déduire le corollaire 1.4. Notre méthode fournit ainsi une nouvelle construction de la compactification magnifique des groupes parahoriques, récemment introduite par Li [Li25b]; toutefois avec l'hypothèse (ii) sur la caractéristique résiduelle de  $K$ . Par conséquent, la fibre générique de notre construction coïncide avec la compactification équivariante du groupe adjoint  $G$  obtenue par Li dans sa thèse [Li25a]. En particulier, après changement de base à une clôture algébrique de  $K$ , on retrouve la compactification magnifique classique de [DP83; Str87].

**Corollaire 1.4 (Cas adjoint).** *Sous les hypothèses (i)-(iv), en supposant  $G$  adjoint et quasi-déployé, et étant donné un  $\mathcal{O}_K$ -modèle parahorique  $\mathcal{P}$  de  $G$  au sens de la définition 2.2, on peut raffiner le théorème 1.2 remplaçant (b) par (b') et ajoutant (d).*

(b') *Il existe des  $\mathcal{O}_K$ -schémas lisses affines à fibres connexes  $\mathcal{U}^+$  et  $\mathcal{U}^-$  dont les fibres génériques s'identifient respectivement à  $U^+$  et  $U^-$ , ainsi qu'une  $\mathcal{O}_K$ -immersion ouverte*

$$\Omega_{\mathcal{P}}: \mathcal{U}^+ \times_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{U}^- \hookrightarrow \widetilde{\overline{\mathcal{P}}},$$

*telle que, les  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ -translatés de l'image de  $\Omega_{\mathcal{P}}$  recouvrent  $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}}$ , quitte à le remplacer par un sous-schéma ouvert avec la même fibre générique.*

*On note que dans le cas où  $G$  est  $K$ -déployé, le  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$  ci-dessus coïncide avec  $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_K}^s$ , où  $s$  désigne le nombre de racines simples de  $G$ .*

(d) *De plus, le complémentaire  $\widetilde{\overline{\mathcal{P}}} \setminus \mathcal{P}$  est la réunion des diviseurs de Cartier effectifs  $\mathcal{O}_K$ -relatifs lisses  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ -invariants à croisements normaux  $\mathcal{O}_K$ -relatifs. En particulier, le changement de base de la donnée  $(\iota_{\mathcal{P}}, \overline{\Omega}_{\mathcal{P}})$  à la clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$  récupère la compactification magnifique de  $G$  sur  $\overline{K}$  construite dans [DP83; Str87].*

*Remarque 1.5.* Comme l'hypothèse (ii), portant sur la caractéristique résiduelle de  $K$ , provient de l'utilisation de la proposition 2.3, il est possible de l'affaiblir légèrement. Plus précisément, elle peut être remplacée par les conditions suivantes (voir [Kun26, Définition 3.8 et Corollary 4.5]) :

$$\begin{cases} p \nmid 2(n+1) & \text{si } G \text{ contient un facteur simple de type } A_n, \text{ pour un } n \geq 2; \\ p \neq 2 & \text{si } G \text{ contient un facteur simple de type } B_n, C_n, D_n \text{ (pour } n \neq 4), \text{ ou } G_2; \\ p \neq 2, 3 & \text{si } G \text{ contient un facteur simple de type } D_4, F_4, E_6 \text{ ou } E_7; \\ p \neq 2, 3, 5 & \text{si } G \text{ contient un facteur simple de type } E_8. \end{cases}$$

*Remarque 1.6 (Dimensions supérieures).* On peut espérer que notre approche se généralise à la construction de compactifications équivariantes pour les groupes  $n$ -parahoriques étudiés par Balaji et Pandey [BP24], pour tout  $n \geq 1$ .

## 2. Les démonstrations

**2.1. Sous-groupes parahoriques.** Gardant l'hypothèse (i) et soit  $\mathcal{O}_{\check{K}}$  l'extension maximale non-ramifiée de  $\mathcal{O}_K$ , de corps des fractions  $\check{K}$ . Etant donné un  $K$ -schéma en groupes réductif connexe  $G$  se déployant sur  $\check{K}$ , on rappelle la notion de sous-groupe parahorique qui y est associée.

D'après les travaux de Bruhat et Tits [BT<sub>II</sub>] (voir également [KP23, Définition 7.6.1]), on peut associer à  $G$  un *immeuble abstrait*  $\mathcal{B}(G, \check{K})$ , dans le sens de [KP23, Définition 1.5.5]. Cet immeuble est appelé *l'immeuble de Bruhat–Tits (réduit)* associé à  $G$  au-dessus de  $\check{K}$ ; il est naturellement muni d'une action de  $G(\check{K})$ . Lorsque  $G$  n'est pas simplement-connecte, on restreint cette action au sous-groupe  $G(\check{K})^0 \subseteq G(\check{K})$ , défini comme le noyau du *morphisme de Kottwitz* (voir [Kun26, §2.10]).

Un sous-groupe  $\mathcal{P} \subseteq G(\check{K})^0$  est dit *parahorique* s'il existe un point  $x \in \mathcal{B}(G, \check{K})$  tel que

$$\mathcal{P} = \text{Stab}_{G(\check{K})^0}(x).$$

On peut alors rappeler la définition des modèles parahoriques associés à  $G$  (voir, par exemple, [Kun26, Définition 2.14]).

**Définition 2.2** (Modèle parahorique). Un  $\mathcal{O}_K$ -schéma en groupes affine lisse à fibres connexes  $\mathcal{P}$  est appelé un *modèle* de  $G$  si sa fibre générique est isomorphe à  $G$ . Un modèle  $\mathcal{P}$  de  $G$  est appelé *parahorique* si  $\mathcal{P}(\mathcal{O}_{\check{K}})$  est un sous-groupe parahorique de  $G(\check{K})^0$ . Il est de plus appelé *réductif* si  $\mathcal{P}$  est un  $\mathcal{O}_K$ -schéma en groupes réductif, i.e., si sa  $\mathcal{O}_K$ -fibre spéciale est réductive.

On rappelle ci-dessous notre résultat sur les réductifications modérées (voir la définition 2.5), établi dans [Kun26].

**Proposition 2.3** ([Kun26, Corollary 4.5(b)]). *Sous les hypothèses (i) et (ii), et étant donné un modèle parahorique  $\mathcal{P}$  de  $G$ , il existe*

- une extension modérée  $L/K$ , d'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$  et de groupe de Galois  $\Gamma$ , et
- un  $\mathcal{O}_L$ -modèle réductif  $\Gamma$ -équivariant  $\mathcal{G}$  du changement de base  $G \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(L)$ , ce dernier muni de la  $\Gamma$ -action semi-linéaire naturelle,

tels que l'on dispose d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas en groupes

$$\mathcal{P} \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathcal{G}), \tag{2.3.1}$$

où le terme à droite désigne le  $\mathcal{O}_K$ -sous-schéma en groupes paramétrant les sections  $\Gamma$ -invariantes de la restriction de Weil de  $\mathcal{G}$  le long de l'extension  $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_L$ . De plus, pour n'importe quelle extension modérée  $F/K$ , on peut choisir une telle extension  $L/K$  contenant  $F$ . Notamment, on peut supposer que  $L/K$  déploie  $G$ , et dans ce cas, le modèle réductif  $\mathcal{G}$  sera lui-même déployé sur  $\mathcal{O}_L$ .

*Démonstration.* Les hypothèses (i) et (ii) nous placent dans le bon cadre pour utiliser [Kun26, Corollary 4.5(b)]. En effet, comme  $G$  se déploie sur une extension modérée, il en est de même pour son tore central maximal. Par ailleurs, la condition sur  $p$  entraîne que le revêtement simplement-connecte du sous-groupe adjoint de  $G$  ne contient aucun « mauvais » facteur simple (voir [Kun26, Définition 3.8 et Proposition 3.9]). La première affirmation résulte alors de [Kun26, Corollary 4.5(b)].

Par ailleurs, [Kun26, Lemma 4.3] nous assure que, pour toute extension modérée  $F/K$ , on peut trouver une telle extension  $L/K$  contenant  $F$ , quitte à remplacer  $L$  par une extension finie modérée plus grande. En particulier, puisque  $G$  se déploie sur une extension modérée, on peut prendre une extension  $L/K$  déployant  $G$ ; dans ce cas, le schéma en groupes  $\mathcal{G}$  est lui-même déployé sur  $\mathcal{O}_L$  d'après [KP23, Lemma B.2.3 et Proposition B.2.4].  $\square$

*Remarque 2.4.* Grâce à [Edi92, Proposition 3.4], le fait que l'extension  $L/K$  soit modérée garantit que le  $\mathcal{O}_K$ -schéma en groupes  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathcal{G})$  soit automatiquement lisse.

**Définition 2.5** (Réductification modérée). Gardant les notations de la proposition 2.3, une paire  $(L, \mathcal{G})$  satisfaisant l'isomorphisme (2.3.1) est appelée *réductification modérée* de  $\mathcal{P}$ . Réciproquement, on dit que ce dernier est un *poussé-en-avant invariant* de  $\mathcal{G}$ .

*Remarque 2.6.* En général, sans hypothèse de modération sur  $L/K$ , une telle paire  $(L, \mathcal{G})$  est simplement appelée *réductification* de  $\mathcal{P}$ . Le résultat principal de [Kun26] montre que tout modèle parahorique  $\mathcal{P}$  admet une réductification, éventuellement non-modérée, et cela en l'absence d'hypothèses sur la caractéristique résiduelle de  $K$  et pour un  $K$ -schéma en groupes réductif arbitraire  $G$ . Pour ce faire, le  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathcal{G})$  n'étant pas nécessairement lisse (voir [Kun26, Exemple 3.13]), on doit remplacer le poussé-en-avant invariant par son lissifié  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathcal{G})_{\text{sm}}$  (voir [Kun26, Définition 1.3]).

Cependant, cette construction de lissification [BLR90, §3] (rappelé dans [Kun26, Définition 3.4]) n'est pas fonctorielle pour tous  $\mathcal{O}_K$ -schéma de type fini admettant une fibre générique lisse. Si un tel foncteur existait (peut-être construit d'une manière équivalente à [ATW24]), notre méthode se généraliserait, puisque nous n'aurions alors plus besoin de l'hypothèse (ii).

*Remarque 2.7.* L'idée du poussé-en-avant invariant remonte à Balaji et Seshadri [BS15], qui ont étudié cette construction en caractéristique 0. Leur résultat a ensuite été généralisé dans [Dam24; DH23]. D'autre part, Pappas et Rapoport [PR24] ont démontré un résultat analogue à la proposition 2.3 dans le cas où  $G$  est un  $K$ -schéma en groupes absolument simple et simplement connexe (voir également [CGP14] pour un résultat connexe). Notre démonstration de la proposition 2.3 s'appuie sur les techniques de Pappas et Rapoport; en particulier, un point essentiel est l'utilisation d'un résultat de Larsen [Lar95] (cf. [Cot24]). On renvoie le lecteur à [Kun26] pour plus de détails.

Avec l'hypothèse (i), étant donné un  $K$ -tore  $T$ , il existe un unique  $\mathcal{O}_K$ -modèle parahorique  $\mathcal{T}$  de  $T$  (voir [KP23, §B.4, B.7 et B.8] ou [CY01, §3]). Ce modèle admet une réduction modérée si et seulement si  $T$  se déploie sur une extension modérée de  $K$  (voir [Kun26, Remark 3.14]).

Avant de procéder avec la démonstration du théorème 1.2 et du corollaire 1.4, nous construisons ci-dessous une compactification équivariante de  $\mathcal{T}$  dont la fibre générique redonne celle de [CHS05]. Cette compactification est un ingrédient dans l'hypothèse (iv).

**Proposition 2.8.** *Sous l'hypothèse (i), étant donné un  $K$ -tore  $T$  se déployant sur une extension modérée de  $K$  avec modèle parahorique  $\mathcal{T}$ , il existe des  $\mathcal{O}_K$ -schémas lisses à fibres connexes  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$  et  $\overline{\mathcal{T}}$ , munis d'une action de  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{T}$ , ainsi que des immersions ouvertes  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{T}$ -équivariantes à fibres denses*

$$\mathcal{T} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}} \quad (2.8.1)$$

tels que  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$  est affine et  $\overline{\mathcal{T}}$  est quasi-projectif, de fibre générique projective, et la fibre générique de la composée des immersions redonne la compactification de  $T$  de [CHS05, corollaire 1].

En outre, s'il existe une extension modérée  $L/K$  telle que l'on ait un isomorphisme de  $K$ -schémas en groupes

$$T \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}), \quad (2.8.2)$$

la première flèche de (2.8.1) s'identifie à l'immersion canonique

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_L}^1). \quad (2.8.3)$$

*Démonstration.* Soit  $L/K$  une extension déployant  $T$ , de groupe de Galois  $\Gamma$ . On fixe un  $L$ -isomorphisme  $T_L \cong \mathbb{G}_{m,L}^r$ , pour un  $r \geq 1$ . On dispose alors d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas en groupes (voir, par exemple, [Kun26, Remark 3.12])

$$\mathcal{T} \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^r). \quad (2.8.4)$$

D'après [Čes22Surv, Theorem 6.3.1], il existe un  $\mathcal{O}_L$ -morphisme  $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}$ -équivariant à fibres denses

$$i: \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^r \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{O}_L}^r.$$

De plus, la construction Galois-invariante dans loc. cit. garantit que chaque  $\mathcal{O}_L$ -schéma en groupes ci-dessus est muni d'une  $\Gamma$ -action semi-linéaire pour lesquelles  $i$  est  $\Gamma$ -équivariant. Par conséquent, afin de construire l'objet central dans (2.8.1), on considère l'ouvert canonique  $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^r \subset \mathbb{A}_{\mathcal{O}_L}^r \subset \mathbb{P}_{\mathcal{O}_L}^r$ , à la fois  $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}$ -invariant, et  $\Gamma$ -invariant.

On peut alors définir

$$\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_L}^r) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{T}} := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_L}^r).$$

Il découle de [CGP15, Propositions A.5.2 et Proposition A.5.8] et [Edi92, Proposition 3.1 et Proposition 3.4] que le  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$  est affine et lisse. De plus, les mêmes références démontrent que le  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{T}}$  est lisse, quasi-projectif et génériquement projectif. En outre, au vu de (2.8.4), puisque le foncteur  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(-)$  commute à tout changement de base, ces deux  $\mathcal{O}_K$ -schémas sont naturellement munis d'une action de  $\mathcal{T} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{T}$ . On obtient alors un diagramme

$$\mathcal{T} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}},$$

avec les flèches canoniques, qui, grâce aux références citées ci-dessus, sont des  $\mathcal{O}_K$ -immersions ouvertes. Enfin, nos arguments affirment que la fibre générique de leur composé redonne bien la compactification dans [CHS05, corollaire 1].

Afin de terminer la construction de (2.8.1), il reste à vérifier que chaque flèche ci-dessus est à fibres denses. En particulier, il suffit de s'assurer que chacune de leur  $\mathcal{O}_K$ -fibre spéciale est dense. Pour ce faire, on modifie le  $\mathcal{O}_K$ -schéma en groupes  $\overline{\mathcal{T}}$  (resp.,  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$ ) en supprimant les composantes connexes de sa fibre spéciale  $(\overline{\mathcal{T}})_\kappa$  (resp.,  $(\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}})_\kappa$ ) qui ne rencontrent pas le sous-schéma ouvert connexe  $\mathcal{T}_\kappa$ , i.e., la fibre spéciale de  $\mathcal{T}$ . Les composantes connexes étant des sous-espaces fermés de  $\overline{\mathcal{T}}$  (resp.,  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$ ), le  $\mathcal{O}_K$ -sous-schéma ouvert résultant  $\overline{\mathcal{T}}$  (resp.,  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$ ) garde les propriétés voulues. Ceci conclut la construction de (2.8.1).

Il nous reste à vérifier le second point de l'énoncé. Pour ce faire, on suppose (2.8.2). Avec cette hypothèse, on sait qu'il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas en groupes  $\mathcal{T} \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L})$ . Ce dernier induit à son tour un isomorphisme de  $\mathcal{O}_L$ -schémas en groupes  $\Gamma$ -équivariant

$$\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_L) \cong \prod_{\Gamma} \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}.$$

Il découle alors de nos arguments précédents qu'il existe des  $\mathcal{O}_K$ -isomorphismes

$$\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma\left(\prod_{\Gamma} \mathbb{A}_{\mathcal{O}_L}^1\right) \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_L}^1).$$

En particulier, le  $\mathcal{O}_K$ -schéma final ci-dessus étant à fibres connexes, on obtient bien l'immersion canonique (2.8.3) annoncée.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.2.* Commençons par la démonstration de (a), qui sera similaire à celle de la proposition 2.8. Grâce à la proposition 2.3, nos hypothèses entraînent que le groupe parahorique  $\mathcal{P}$  admet une réduction modérée, i.e., on peut trouver une extension galoisienne modérément ramifiée  $L/K$  déployant  $G$  et contenant  $F$  avec comme groupe de Galois  $\Gamma$  et anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$ , ainsi qu'un  $\mathcal{O}_L$ -modèle réductif  $\mathcal{G}$  muni d'une  $\Gamma$ -action semi-linéaire, compatible avec la  $\Gamma$ -action naturelle sur sa fibre générique  $G \times_K \text{Spec}(L)$ , tels que l'on dispose d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas en groupes

$$\mathcal{P} \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\mathcal{G}).$$

Par conséquent, d'après [Nat26, Theorem 1.2], il existe un  $\mathcal{O}_L$ -schéma lisse et projectif  $\overline{\mathcal{G}}$ , muni d'une action de  $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_L} \mathcal{G}$ , ainsi qu'une  $\mathcal{O}_L$ -immersion ouverte

$$i: \mathcal{G} \hookrightarrow \overline{\mathcal{G}}$$

à fibres denses et  $\mathcal{G} \times_{\mathcal{O}_L} \mathcal{G}$ -équivariante. Or, la  $\Gamma$ -invariance de la construction de  $i$  dans loc. cit. (cf. [Nat26, Lemma 3.2.1]) entraîne que  $\overline{\mathcal{G}}$  est muni d'une  $\Gamma$ -action semi-linéaire canonique pour laquelle  $i$  est  $\Gamma$ -équivariante.

Prenons maintenant le poussé-en-avant invariant  $\overline{\mathcal{P}'} := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(\overline{\mathcal{G}})$ , celui-ci induit un morphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas naturel

$$\iota_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}'}$$

Il résulte de [CGP15, Propositions A.5.2] et [Edi92, Proposition 3.1] que  $\iota_{\mathcal{P}}$  est une immersion ouverte. De plus, les mêmes références impliquent que le foncteur  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^\Gamma(-)$  commute à tout changement de base. En particulier, la  $\mathcal{O}_K$ -fibre générique  $\iota_G$  de  $\iota_{\mathcal{P}}$  coïncide avec la compactification de  $G$  construite dans [Nat26, Theorem 1.2]. Pour que  $\iota_{\mathcal{P}}$  soit à fibres denses, il suffit alors que sa  $\mathcal{O}_K$ -fibre spéciale  $\iota_{\mathcal{P}}: \mathcal{P}_\kappa \hookrightarrow (\overline{\mathcal{P}'})_\kappa$  soit dense. Comme dans la démonstration de la proposition 2.8, on supprime les composantes connexes de  $(\overline{\mathcal{P}'})_\kappa$  qui ne rencontrent pas le sous-schéma ouvert connexe  $\mathcal{P}_\kappa$  du  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{P}'}$ . Ainsi, on construit un  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{P}}$  et un morphisme

$$\iota_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}}$$

qui, par construction, satisfait les conditions nécessaires. Ceci découle en particulier de [CGP15, Propositions A.5.2 et A.5.8] et de [Edi92, Propositions 3.1 et 3.4].

Afin de prouver (b), on remarque que le changement de base à  $L$  de la paire  $B^\pm$  fournit une paire  $B^\pm \otimes_F \text{Spec}(L)$  de  $L$ -sous-groupes de Borel opposés. De plus, cette paire est naturellement munie d'une  $\Gamma' := \text{Gal}(L/F)$ -action compatible avec la restriction à  $\Gamma'$  de la  $\Gamma$ -action sur la donnée  $T \otimes_K \text{Spec}(L) \subseteq G \otimes_K \text{Spec}(L)$ . Or, la projectivité du foncteur paramétrant les sous-groupes de Borel permet alors de relever de manière unique cette paire à une paire de  $\mathcal{O}_L$ -sous-groupes de Borel opposés  $B^\pm$ , chacun étant muni naturellement d'une  $\Gamma'$ -action compatible avec celle sur sa fibre générique. Par conséquent, le tore  $T \otimes_K \text{Spec}(L)$  se relève à un  $\mathcal{O}_L$ -tore maximal  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}$ ,

$$\mathcal{T} = B^+ \cap B^- \hookrightarrow \mathcal{G}, \quad (2.8.5)$$

et ce relèvement est lui aussi muni naturellement d'une  $\Gamma'$ -action respectant celle sur sa fibre générique. On considère ensuite les radicaux unipotents  $U^\pm$  de  $B^\pm$ , lesquels sont automatiquement stables par la  $\Gamma'$ -action, puisque le radical unipotent est caractéristique. On peut donc définir

$$\mathcal{U}^\pm := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(U^\pm). \quad (2.8.6)$$

En effet, comme précédemment, d'après [CGP15, Propositions A.5.2] et [Edi92, Propositions 3.1 et 3.4], les  $\mathcal{O}_K$ -sous-schémas en groupes  $\mathcal{U}^\pm$  sont affines et lisses. De plus, un argument utilisant la descente galoisienne pour l'extension  $L/F$  nous montre qu'il existe des  $L$ -isomorphismes  $\mathcal{U}^\pm \times_{\mathcal{O}_F} \text{Spec}(L) \cong U^\pm$ . L'immersion (2.8.5) induit une  $\mathcal{O}_L$ -immersion  $\Gamma'$ -équivariante  $\overline{\mathcal{T}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{G}}$  des compactifications construites dans [Nat26, Theorem 1.2 et Proposition 3.3.3]. Notre construction dans la proposition 2.8 induit alors une  $\mathcal{O}_F$ -immersion

$$\overline{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}).$$

Montrons ci-dessous que  $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \cong \overline{\mathcal{P}'} \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_F)$ . On commence par prendre la suite exacte des groupes de Galois

$$1 \rightarrow \Gamma' \rightarrow \Gamma \rightarrow \Xi \rightarrow 1.$$

Or, la descente non-ramifiée produit un isomorphisme

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \cong \left( \prod_{\Xi} \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \right)^\Xi.$$

Ainsi, on peut déduire de l'isomorphisme  $\Xi$ -équivariant

$$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_F \cong \prod_{\Xi} \mathcal{O}_L$$

qu'il y a un isomorphisme  $\Xi$ -équivariant  $\prod_{\Xi} \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \cong \mathfrak{R}_{(\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_F)/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}})$ . Par ailleurs, à nouveau d'après [CGP15, Propositions A.5.2] et [Edi92, Propositions 3.1], on a un isomorphisme  $\Xi$ -équivariant

$$\mathfrak{R}_{(\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_F)/\mathcal{O}_F}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^{\Gamma'}(\overline{\mathcal{G}}) \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_F).$$

En prenant les  $\Xi$ -invariants, et puisque, par [Edi92, Propositions 3.1], ils commutent avec tout changement de base, on obtient l'isomorphisme requis. En effet, il y a des  $\mathcal{O}_L$ -isomorphismes

$$(\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^{\Gamma'}(\mathcal{G}) \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_F))^{\Xi} \cong (\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^{\Gamma'}(\mathcal{G}))^{\Xi} \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_F) \cong \overline{\mathcal{P}}' \times_{\mathcal{O}_K} \text{Spec}(\mathcal{O}_L).$$

Par conséquent, on déduit de la définition de  $\overline{\mathcal{P}}$  que

$$\overline{\mathcal{T}} \hookrightarrow (\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}.$$

D'après [Nat26, Proposition 3.3.3], [CGP15, Propositions A.5.2] et [Edi92, Propositions 3.1], l'immersion ci-dessus accompagnée de (2.8.6) fournit une  $\mathcal{O}_F$ -immersion ouverte

$$\overline{\Omega}_{\mathcal{P}}: \mathcal{U}^+ \times_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{T}} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{U}^- \longrightarrow (\overline{\mathcal{P}})_{\mathcal{O}_F}.$$

Il reste donc à démontrer les propriétés demandées de  $\overline{\mathcal{P}}$ . Grâce à la descente galoisienne, la fibre générique de  $\overline{\mathcal{P}}$  s'identifie à la compactification construite dans [Nat26, Theorem 1.2] de  $G_F$ . Or, op. cit. Proposition 3.3.3 prouve que les  $G_F \times_F G_F$ -translatés de l'image de  $\overline{\Omega}_G$  recouvrent cette compactification. On en déduit que la fibre générique de  $\overline{\mathcal{P}}$  s'identifie avec celle de  $\mathcal{P}$ . Enfin, d'après, par exemple, op. cit. Lemma 2.3.3, le  $\mathcal{O}_F$ -sous-schéma  $\overline{\mathcal{P}}$  est un sous-schéma ouvert  $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_F} \times_{\mathcal{O}_F} \mathcal{P}_{\mathcal{O}_F}$ -invariant de  $\mathcal{P}$ .

Pour terminer cette démonstration, il reste à montrer (c). Pour ceci, il suffit de suivre les arguments dans [Li25b, §6.6].  $\square$

*Démonstration du corollaire 1.4.* Supposons maintenant que  $G$  est quasi-déployé et adjoint sur  $K$ . Dans ce cas, le tore maximal  $T$  est induit, i.e., on dispose d'un isomorphisme de  $K$ -schémas en groupes

$$T \cong \prod_{\delta \in \Delta} \mathfrak{R}_{K_\delta/K}(\mathbb{G}_{m, K_\delta}),$$

où le produit porte sur l'ensemble fini  $\Delta$  des racines simples de  $G$  et pour chaque  $\delta \in \Delta$  le corps  $K_\delta$  est une sous-extension du corps de déploiement de  $T$  (voir, par exemple, [Kun26, Remark 2.6]), Par conséquent, d'après la proposition 2.8, il existe des  $\mathcal{O}_K$ -immersions ouvertes à fibres denses  $\mathcal{T} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}$  telles qu'avec les notations du diagramme ci-dessus, on a un isomorphisme de  $\mathcal{O}_K$ -schémas en groupes

$$\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \cong \prod_{\delta \in \Delta} \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_{K_\delta}/\mathcal{O}_K}(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_{K_\delta}}^1).$$

De plus, il s'en suit que lorsque  $T$  est  $K$ -déployé, le  $\mathcal{O}_K$ -schéma  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}}$  s'identifie à  $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_K}^{|\Delta|}$ . Grâce à l'isomorphisme ci-dessus et au théorème 1.2(b), nous obtenons l'immersion ouverte nécessaire

$$\Omega_{\mathcal{P}}: \mathcal{U}^+ \times_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{U}^- \hookrightarrow \overline{\mathcal{P}}$$

par restriction de  $\overline{\Omega}_{\mathcal{P}}$ . Dans le même esprit que la démonstration du théorème 1.2(b), on peut montrer que les  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{P}}$ -translatés de l'image  $U_{\mathcal{P}}$  de  $\Omega_{\mathcal{P}}$  forment un sous-schéma ouvert de  $\overline{\mathcal{P}}$  dont la fibre générique récupère celle de  $\overline{\mathcal{P}}$ . Ceci termine la démonstration de (b').

Pour démontrer (d), on note que [Nat26, Theorem 1.3] justifie que  $\iota_G$  s'identifie à la compactification magnifique de  $G$  construite dans [Li25a, Theorem 1.1]. En particulier, après changement de base à une clôture algébrique de  $K$ , la compactification  $\iota_G$  correspond à celle construite dans [DP83; Str87].

On en déduit que la fibre générique du complément  $\overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$  est la réunion des diviseurs de Cartier effectifs lisses  $\mathcal{P}_K \times_K \mathcal{P}_K$ -invariants à croisements normaux. Il reste donc à établir la même propriété pour la fibre spéciale. Ceci découle de [Li25b, Theorem 1.1(4)] (ou voir [Li25b, Theorem 7.1] pour un énoncé sans l'hypothèse que  $\mathcal{O}_K$  soit strictement hensélien) grâce à l'unicité de la construction (voir [Li25b, Theorem 1.1] ou le théorème 1.2(c).)

Nous donnons toutefois ci-dessous un argument bref et indépendant, suivant ceux de [Nat26, Proposition 4.2] et [Li25b, Proposition 6.13], afin de prouver que le complément  $\overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$  également est la réunion des diviseurs de Cartier effectifs  $\mathcal{O}_K$ -relatifs lisses  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ -invariants à croisements normaux  $\mathcal{O}_K$ -relatifs.

Tout d'abord, puisque le domaine du morphisme  $\Omega_{\mathcal{P}}$  est affine, le morphisme  $\Omega_{\mathcal{P}}$  est lui-même affine. En conséquence, le complément de son image est de codimension 1 (voir [Sta26, Tag 0BCU]), d'où la même propriété pour le complément  $\overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$ . Soit donc  $\mathcal{D}$  une composante irréductible (ce qui, dans notre cas, équivaut à être une composante connexe) quelconque de  $\overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$ . La connexité des fibres de  $\mathcal{P}$  assure que  $\mathcal{D}$  est  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ -invariant. Pour conclure, comme les  $\mathcal{P} \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{P}$ -translatés de l'ouvert dense  $U_{\mathcal{P}}$  recouvrent  $\overline{\mathcal{P}}$ , il suffit de vérifier que l'intersection

$$(\overline{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}) \cap U_{\mathcal{P}} = U_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$$

est une réunion des diviseurs de Cartier effectifs  $\mathcal{O}_K$ -relatifs lisses à croisements normaux  $\mathcal{O}_K$ -relatifs. Le sous-schéma fermé  $U_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$  de codimension 1 est l'annulation d'un idéal principal, car l'anneau des coordonnées de  $U_{\mathcal{P}}$ , non canoniquement isomorphe à un espace affine sur  $\mathcal{O}_K$ , est factoriel. Par ailleurs, on en déduit du diagramme (2.8.3) que le complément  $\overline{\mathcal{T}}^{\text{aff}} \setminus \mathcal{T}$  est une réunion des diviseurs de Cartier  $\mathcal{O}_K$ -relatifs lisses à croisements normaux  $\mathcal{O}_K$ -relatifs et il en est alors de même pour  $\Omega_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}$ . Ceci termine notre démonstration.  $\square$

## Remerciements

Nous tenons à remercier Vikraman Balaji pour son intérêt dans ce projet et ses encouragements. C'est d'ailleurs lui qui, lors d'une de nos nombreuses discussions, nous a suggéré l'idée d'utiliser les réductifications pour construire ces compactifications équivariantes. Nous sommes également reconnaissants envers Kęstutis Česnavičius pour nos discussions très utiles et remercions Michel Brion et Ayan Nath pour nos échanges fructueux.

Ce projet a reçu un financement partiel de la bourse PNR grant CF 44/14.11.2022 « *Cohomological Hall algebras of smooth surfaces and applications* » et l'hospitalité du Lodha Mathematical Sciences Institute.

## Références

- [AM15] Noriyuki ABE et Yoichi MIEDA. « Jacquet functor and De Concini–Procesi compactification ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 12 (2015), p. 3810–3829. ISSN : 1073-7928,1687-0247. DOI : [10.1093/imrn/rnu048](https://doi.org/10.1093/imrn/rnu048). URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnu048>.
- [ATW24] Dan ABRAMOVICH, Michael TEMKIN et Jarosław WŁODARCZYK. « Functorial embedded resolution via weighted blowings up ». In : *Algebra Number Theory* 18.8 (2024), p. 1557–1587. ISSN : 1937-0652,1944-7833. DOI : [10.2140/ant.2024.18.1557](https://doi.org/10.2140/ant.2024.18.1557). URL : <https://doi.org/10.2140/ant.2024.18.1557>.
- [BS15] V. BALAJI et C. S. SESHADRI. « Moduli of parahoric  $\mathcal{G}$ -torsors on a compact Riemann surface ». In : *J. Algebraic Geom.* 24.1 (2015), p. 1–49. ISSN : 1056-3911,1534-7486. DOI : [10.1090/S1056-3911-2014-00626-3](https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2014-00626-3). URL : <https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2014-00626-3>.
- [BP24] Vikraman BALAJI et Yashonidhi PANDEY. « On Bruhat-Tits theory over a higher-dimensional base ». In : *Épjournal Géom. Algébrique* 8 (2024), Art. 14, 64. ISSN : 2491-6765.
- [BK15] Roman BEZRUKAVNIKOV et David KAZHDAN. « Geometry of second adjointness for  $p$ -adic groups ». In : *Represent. Theory* 19 (2015). With an appendix by Yakov Varshavsky, Bezrukavnikov and Kazhdan, p. 299–332. ISSN : 1088-4165. DOI : [10.1090/ert/471](https://doi.org/10.1090/ert/471). URL : <https://doi.org/10.1090/ert/471>.
- [BLR90] Siegfried BOSCH, Werner LÜTKEBOHMERT et Michel RAYNAUD. *Néron models*. T. 21. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990, p. x+325. ISBN : 3-540-50587-3. DOI : [10.1007/978-3-642-51438-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-51438-8).
- [BT<sub>II</sub>] F. BRUHAT et J. TITS. « Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires ». In : *Bull. Soc. Math. France* 115.2 (1987), p. 141–195. ISSN : 0037-9484. URL : [http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1987\\_\\_115\\_\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__141_0).
- [Čes22<sub>Surv</sub>] Kęstutis ČESNAVIČIUS. « Problems About Torsors over Regular Rings ». In : *Acta Math. Vietnam.* 47.1 (2022), p. 39–107. ISSN : 0251-4184. DOI : [10.1007/s40306-022-00477-y](https://doi.org/10.1007/s40306-022-00477-y).
- [CY01] Ching-Li CHAI et Jiu-Kang YU. « Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor ». In : *Ann. of Math.* (2) 154.2 (2001). With an appendix by Ehud de Shalit, p. 347–382. ISSN : 0003-486X,1939-8980. DOI : [10.2307/3062100](https://doi.org/10.2307/3062100). URL : <https://doi.org/10.2307/3062100>.
- [CGP14] V. CHERNOUSOV, P. GILLE et A. PIANZOLA. « Conjugacy theorems for loop reductive group schemes and Lie algebras ». In : *Bull. Math. Sci.* 4.2 (2014), p. 281–324. ISSN : 1664-3607,1664-3615. DOI : [10.1007/s13373-014-0052-8](https://doi.org/10.1007/s13373-014-0052-8). URL : <https://doi.org/10.1007/s13373-014-0052-8>.
- [CHS05] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. HARARI et A. N. SKOROBOGATOV. « Compactification équivariante d'un tore (d'après Brylinski et Künnemann) ». In : *Expo. Math.* 23.2 (2005), p. 161–170. ISSN : 0723-0869. DOI : [10.1016/j.exmath.2005.01.016](https://doi.org/10.1016/j.exmath.2005.01.016).
- [Con14] Brian CONRAD. « Reductive group schemes ». In : *Autour des schémas en groupes. Vol. I*. T. 42/43. Panor. Synthèses. Soc. Math. France, Paris, 2014, p. 93–444.
- [CGP15] Brian CONRAD, Ofer GABBER et Gopal PRASAD. *Pseudo-reductive groups*. Second. T. 26. *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015, p. xxiv+665. ISBN : 978-1-107-08723-1. DOI : [10.1017/CB09781316092439](https://doi.org/10.1017/CB09781316092439).
- [Cot24] Sean COTNER. « Morphisms of character varieties ». In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* 16 (2024), p. 11540–11548. ISSN : 1073-7928,1687-0247. DOI : [10.1093/imrn/rnae124](https://doi.org/10.1093/imrn/rnae124). URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rnae124>.
- [Dam24] Chiara DAMIOLINI. « On equivariant bundles and their moduli spaces ». In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 362 (2024), p. 55–62. ISSN : 1631-073X,1778-3569. DOI : [10.5802/crmath.524](https://doi.org/10.5802/crmath.524). URL : <https://doi.org/10.5802/crmath.524>.
- [DH23] Chiara DAMIOLINI et Jiuzu HONG. « Local types of  $(\Gamma, G)$ -bundles and parahoric group schemes ». In : *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 127.2 (2023), p. 261–294. ISSN : 0024-6115,1460-244X. DOI : [10.1112/plms.12544](https://doi.org/10.1112/plms.12544). URL : <https://doi.org/10.1112/plms.12544>.
- [DP83] C. DE CONCINI et C. PROCESI. « Complete symmetric varieties ». In : *Invariant theory (Montecatini, 1982)*. T. 996. *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 1983, p. 1–44. ISBN : 3-540-12319-9. DOI : [10.1007/BFb0063234](https://doi.org/10.1007/BFb0063234). URL : <https://doi.org/10.1007/BFb0063234>.
- [Edi92] Bas EDIXHOVEN. « Néron models and tame ramification ». In : *Compositio Math.* 81.3 (1992), p. 291–306. ISSN : 0010-437X,1570-5846. URL : [http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1992\\_\\_81\\_3\\_291\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1992__81_3_291_0).
- [He13] Xuhua HE. « Normality and Cohen-Macaulayness of local models of Shimura varieties ». In : *Duke Math. J.* 162.13 (2013), p. 2509–2523. ISSN : 0012-7094,1547-7398. DOI : [10.1215/00127094-2371864](https://doi.org/10.1215/00127094-2371864). URL : <https://doi.org/10.1215/00127094-2371864>.
- [KP23] Tasho KALETHA et Gopal PRASAD. *Bruhat-Tits theory—a new approach*. T. 44. *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2023, p. xxx+718. ISBN : 978-1-108-83196-3.
- [Kun26] Arnab KUNDU. *Reductification of parahoric group schemes*. 2026. arXiv : 2603.05554 [math.AG]. URL : <https://arxiv.org/abs/2603.05554>.

- [Lar95] M. LARSEN. « Maximality of Galois actions for compatible systems ». In : *Duke Math. J.* 80.3 (1995), p. 601-630. issn : 0012-7094,1547-7398. doi : [10.1215/S0012-7094-95-08021-1](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08021-1). url : <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-95-08021-1>.
- [Li25a] Shang LI. *An equivariant compactification for adjoint reductive group schemes*. 2025. arXiv : 2308.01715 [math.AG]. url : <https://arxiv.org/abs/2308.01715>.
- [Li25b] Shang LI. *Wonderful embedding for group schemes in the Bruhat-Tits theory*. 2025. arXiv : 2505.12777 [math.AG]. url : <https://arxiv.org/abs/2505.12777>.
- [Nat26] Ayan NATH. *Compactification of Reductive Group Schemes*. 2026. arXiv : 2601.22462 [math.AG]. url : <https://arxiv.org/abs/2601.22462>.
- [PR24] Georgios PAPPAS et Michael RAPOPORT. « On tamely ramified  $\mathcal{G}$ -bundles on curves ». In : *Algebr. Geom.* 11.6 (2024). With an appendix by Brian Conrad, p. 796-829. issn : 2313-1691,2214-2584.
- [Sta26] The STACKS PROJECT AUTHORS. *The Stacks project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2026.
- [Str87] Elisabetta STRICKLAND. « A vanishing theorem for group compactifications ». In : *Math. Ann.* 277.1 (1987), p. 165-171. issn : 0025-5831,1432-1807. doi : [10.1007/BF01457285](https://doi.org/10.1007/BF01457285). url : <https://doi.org/10.1007/BF01457285>.